

3.4.8 Obsah kruhu I

Předpoklady: 030407

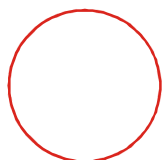
Př. 1: Jaký je rozdíl mezi obvodem a obsahem? V jakých jednotkách se udává obvod, v jakých obsah?

Obvod je délka hranice (provázku, kterým bychom útvar ohraničili) $\Rightarrow$ udává se v jednotkách délky (m, cm, km, ...).

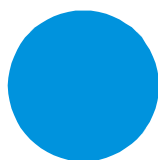
Obsah představuje velikost ohraničené plochy $\Rightarrow$ udává se ve čtverečních jednotkách (m^2 , cm^2 , km^2 , ...).

Obrázkem:

obvod



obsah



Př. 2: Sepiš vzorce, které jsme se dosud učili, pro obvod a obsah různých útvarů. Co mají společného vzorce pro obvod? Co mají společného vzorce pro obsah?

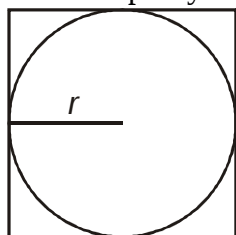
čtverec	$o = 4a$	$S = a^2$
obdélník	$o = 2a + 2b$	$S = ab$
trojúhelník	$o = a + b + c$	$S = \frac{av_a}{2}$
lichoběžník	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a + c)v}{2}$

Všechny vzorce pro obvod obsahují pouze sčítání délek (nebo délek vynásobených čísly).

Všechny vzorce pro obsah obsahují pouze součiny dvou délek (součet $a + c$ je také délka).

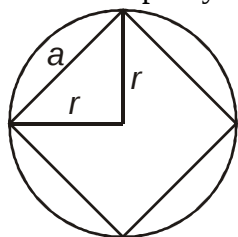
Př. 3: Do obrázku kružnici vepiš a opiš čtverec. Urči obsahy těchto čtverců v případě, že kružnice má poloměr r . Co můžeme tvrdit o obsahu kružnice, která má poloměr r ?

Čtverec opsaný kružnici:



Strana čtverce má délku $2r \Rightarrow$ obsah čtverce: $S = a^2 = (2r)^2 = 4r^2$.

Čtverec vepsaný kružnici:



Délku strany čtverce můžeme určit pomocí Pythagorovy věty: $a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

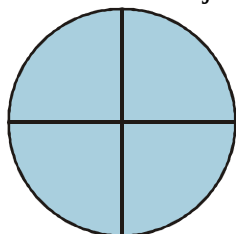
Obsah čtverce: $S = a^2 = 2r^2$.

Obsah kružnice, která má poloměr r bude určitě větší než $2r^2$ a menší než $4r^2$.

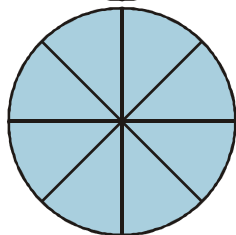
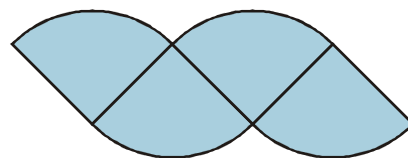
Pedagogická poznámka: Nečekáme až většina třídy vyřeší obsah vepsaného čtverce, jen si společně zkontrolujeme výsledek a řekneme si, jaký by měl být obsah kruhu.

Př. 4: Vzorec pro obsah kružnice můžeme snadno odvodit, když si představíme, že kružnici rozřežeme na mnoho velmi tenkých výsečí (jako když krájíme dort pro velký počet jedlíků) a tyto kousky pak vhodně přerovnáme, abychom z nich získali tvar podobný jednomu z útvarů, jejichž obsahy už jsme počítali. Zkus tento vzorec odvodit.

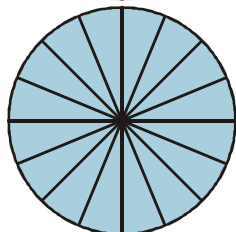
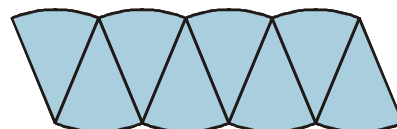
Zkusíme kružnici krájet na kousky jako dort a skládat je na talířek.



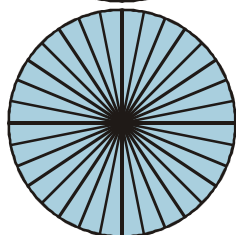
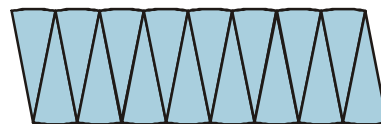
$\Rightarrow$



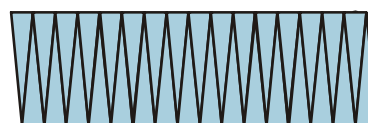
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



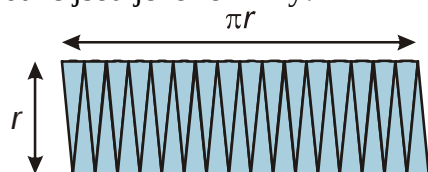
$\Rightarrow$



Čím menší měsíčky nakrájíme, tím více se útvar, který z nich můžeme poskládat, blíží obdélníku. Kdybychom nařezali nekonečně mnoho nekonečně tenkých kousků, získali bychom přesně obdélník.

Pedagogická poznámka: Nechávám žákům čas, aby našli rozměry obdélníku a tedy i vzorec sami.

Jaké jsou jeho rozměry?



Obsah obdélníku: $S = ab = r \cdot \pi r = \pi r^2$.

Př. 5: Zkontroluj, zda získaný vzorec odpovídá očekáváním, na která jsme přišli během hodiny.

Podle příkladů ze začátku hodiny by správný vzorec měl:

- obsahovat součin dvou délek: splněno druhou mocninou poloměru,
- vyhovovat nerovnosti pro obsah kruhu, čtverce opsaného a vepsaného: splněno, protože platí $2 < \pi < 4 \Rightarrow$ platí i $2r^2 < \pi r^2 < 4r^2$,

$\Rightarrow$ náš vzorec může být správný vzorec pro obsah kruhu.

Obsah kruhu o poloměru r je dán vztahem $S = \pi r^2$.

Př. 6: Urči obsah kruhu o poloměru:

a) 6 cm

b) 230 m

c) 0,07 km

a) 6 cm : $S = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 \text{ cm}^2 = 113 \text{ cm}^2$

b) 230 m : $S = \pi r^2 = \pi \cdot 230^2 \text{ m}^2 = 166\,000 \text{ m}^2$

c) 0,07 km : $S = \pi r^2 = \pi \cdot 0,07^2 \text{ km}^2 = 0,0154 \text{ km}^2$

Shrnutí: Pro obsah kruhu platí vztah $S = \pi r^2$.